

**SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA  
Anno Accademico 2001-2002**

*Angelo Favini*

**IL PROBLEMA DEL REGOLATORE PER UN  
SISTEMA DIFFERENZIALE SINGOLERE**

27 novembre 2001

Tecnoprint - Bologna 2003

**Sunto.** Si considera il problema del regolatore per una equazione differenziale degenera in uno spazio di Hilbert. Si mostra che il problema é riconducibile al caso regolare mediante opportuno cambiamento di variabile.

Si forniscono esempi di applicazione ad equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali.

**Summary.** The regulator problem for a degenerate differential equation in a Hilbert space is investigated. It is shown that a suitable change of variable argument reduces the minimum problem to the one for a regular system.

Examples of application to ordinary differential equations and partial differential equations are given.

## 0 Introduzione

In questo seminario si considera il problema del regolatore per il sistema singolare

$$\frac{d}{dt}(My)(t) + Ly(t) = Bu(t), \quad 0 < t < \tau < +\infty, \quad (0.1)$$

$$(My)(0) = My_0, \quad (0.2)$$

dove  $L, M$  sono operatori lineari chiusi nello spazio di Hilbert reale  $H$ ,  $B$  è un operatore lineare continuo dallo spazio di Hilbert reale  $U$  in  $H$ , (brevemente,  $B \in \mathcal{L}(U, H)$ ), il dominio  $\mathcal{D}(L)$  di  $L$  è contenuto nel dominio  $\mathcal{D}(M)$  di  $M$ ,  $L$  ha inverso limitato e  $y_0$  è un dato elemento di  $\mathcal{D}(L)$ .

$M$  può essere non invertibile, ma si suppone che  $z = 0$  sia un polo semplice per il risolvente  $(z + T)^{-1}$ , dove

$$T = ML^{-1}, \quad (0.3)$$

cioè

$$\|M(zL + M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C|z|^{-1}, \quad 0 < |z| \leq \epsilon_0, \quad (0.4)$$

per opportune costanti positive  $C, \epsilon_0$ .

Nella monografia [8] di Favini e Yagi si possono trovare vari esempi concreti di equazioni alle derivate parziali soddisfacenti l'equazione (0.4). Per brevità, la norma dell'operatore in  $\mathcal{L}(H) := \mathcal{L}(H, H)$  verrà denotata con  $\|\cdot\|$ .

Si associa al problema (0.1), (0.2) il funzionale costo quadratico

$$J(u) := \int_0^\tau \{\langle Ky, y \rangle_H + \langle Nu, u \rangle_U\} dt \quad (0.5)$$

dove  $K = K^* \geq 0$ ,  $N = N^* > 0$  sono operatori lineari autoaggiunti in  $H$  e in  $U$ , rispettivamente.

L'obiettivo principale del seminario è di mostrare che  $J(u)$  è minimizzato in  $U$ , cioè esiste un unico controllo  $u^* \in L^2(0, \tau; U)$  tale che

$$J(u^*) = \min_{u \in L^2(0, \tau; U)} J(u). \quad (0.6)$$

In effetti, qui ci limiteremo a considerare un caso un po' più particolare, nel senso che verrà precisato in seguito, ma il risultato finale è vero in generale, come provato nel lavoro [3] di Barbu, Favini e Pandolfi. Tuttavia, la tecnica è sostanzialmente la stessa, e vengono utilizzati i ben noti risultati di J.L. Lions nella monografia [11] relativi ad equazioni non degeneri.

Il problema di minimo (0.1), (0.2), (0.6) è ampiamente considerato in letteratura. Esso è fondamentalmente motivato da ricerche in teoria dei sistemi e dei controlli automatici, dove  $H, U$  hanno dimensione finita. Ricordiamo i lavori di Bender e Laub [4], di Cobb [6], Pandolfi [12], le monografie di Campbell [5] e Dai [7], il survey [10] di Lewis. Più recentemente, sempre facendo ricorso alla tecnica di J.L. Lions, il problema è stato considerato da Sviridyuk ed Efremov [13] e da Barbu e Favini [2].

Si noti che l'assunzione (0.4) è davvero essenziale, perché consente di trattare funzionali costo  $J(u)$  in (0.5) non contenenti le derivate di  $u(t)$  (come in Sviridyuk-Efremov [13]).

Si potrebbe naturalmente studiare il problema anche quando i coefficienti operatoriali dipendono dal tempo oppure quando il costo é

$$\int_0^\tau \{ \langle Ky, y \rangle_H + 2 \langle y, Ru \rangle_H + \langle Nu, u \rangle_U \} dt,$$

dove  $R \in \mathcal{L}(U; H)$ , purché la matrice operatoriale

$$\begin{bmatrix} K & R \\ R^* & N \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(H \times U)$$

sia  $\geq 0$  nello spazio prodotto  $H \times U$  munito del prodotto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H + \langle \cdot, \cdot \rangle_U$ .

Risultati interessanti concernenti l'equazione (0.1) a coefficienti dipendenti dal tempo si possono trovare nel lavoro [1] di Balla e März.

## 1 Risultati principali

E' ben noto che, sotto l'assunzione (0.4), vale la rappresentazione di  $H$  come somma diretta

$$H = N(T) \oplus R(T), \quad (1.1)$$

dove  $N(T)$  e  $R(T)$  denotano rispettivamente lo spazio nullo e il rango (immagine) di  $T$ . Inoltre,  $R(T)$  é anche un sottospazio chiuso di  $H$ .  $N(T)$  e  $R(T)$  sono quindi spazi di Hilbert con la norma indotta da  $H$ . Denoteremo con  $P$  l'operatore di proiezione su  $N(T)$  lungo  $R(T)$ . L'assunzione ulteriore che faremo é

$$P \text{ é autoaggiunto.} \quad (1.2)$$

Il cambiamento di variabile  $Ly = x$  trasforma il problema (0.1), (0.2) in

$$\frac{d}{dt}(Tx)(t) + x(t) = Bu(t), \quad 0 < t < \tau, \quad (1.3)$$

$$(Tx)(0) = Tx_0, \quad (1.4)$$

dove

$$x_0 = Ly_0. \quad (1.5)$$

Notiamo che il cambiamento di variabile apportato evidenzia la regolarit  della soluzione che cerchiamo, cio  soluzioni strette.

Il funzionale costo  $J(u)$  diventa

$$J(u) = \int_0^\tau \{ \langle L^{*-1} K L^{-1} x(t), x(t) \rangle_H + \langle Nu(t), u(t) \rangle_U \} dt. \quad (1.6)$$

Osserviamo ora (scrivendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  al posto di  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ , per semplicit ) che in forza della assunzione (1.2) ( $P$  autoaggiunto)

$$\begin{aligned} \langle L^{*-1} K L^{-1} x, x \rangle &= \langle (I - P) L^{*-1} K L^{-1} (I - P)x, (I - P)x \rangle + \langle P L^{*-1} K L^{-1} (I - P)x, Px \rangle \\ &+ \langle (I - P) L^{*-1} K L^{-1} Px, (I - P)x \rangle + \langle P L^{*-1} K L^{-1} Px, Px \rangle. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Inoltre, il sistema (1.1), (1.2) é equivalente al problema algebrico-differenziale

$$\frac{d}{dt}\tilde{T}(I-P)x(t) + (I-P)x(t) = (I-P)Bu(t), \quad 0 < t < \tau, \quad (1.8)$$

$$\tilde{T}(I-P)x(0) = \tilde{T}(I-P)x_0, \quad (1.9)$$

$$Px(t) = PBu(t), \quad 0 < t < \tau, \quad (1.10)$$

dove  $\tilde{T}$  denota la restrizione di  $T$  a  $R(T)$ . Si vede facilmente che  $\tilde{T} \in \mathcal{L}(R(T))$  ed ha inverso limitato. Pertanto (1.8), (1.9) si riduce al sistema regolare

$$\frac{d}{dt}(I-P)x(t) + \tilde{T}^{-1}(I-P)x(t) = \tilde{T}^{-1}(I-P)Bu(t), \quad 0 < t < \tau, \quad (1.11)$$

$$(I-P)x(0) = (I-P)x_0. \quad (1.12)$$

Sostituendo l'espressione (1.10) per  $Px(t)$  nella (1.7), si ottiene

$$\begin{aligned} \langle L^{*-1}KL^{-1}x \rangle &= \langle (I-P)L^{*-1}KL^{-1}(I-P)x, (I-P)x \rangle \\ &+ \langle (I-P)L^{*-1}KL^{-1}PBu, (I-P)x \rangle + \langle B^*PL^{*-1}KL^{-1}(I-P)x, u \rangle_U \\ &+ \langle B^*PL^{*-1}KL^{-1}Bu, u \rangle_U. \end{aligned}$$

Nello spazio  $R(T) \times U$  introduciamo il prodotto interno

$$\langle ((I-P)x, u), ((I-P)y, v) \rangle = \langle (I-P)x, (I-P)y \rangle_H + \langle u, v \rangle_U \quad (1.13)$$

con  $x, y \in H$ ,  $u, v \in U$ .

Allora  $J(u)$  é espresso da

$$J(u) = \int_0^\tau \left\langle \begin{bmatrix} \bar{F} & \mathcal{H} \\ \mathcal{H}^* & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I-P)x \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (I-P)x \\ u \end{bmatrix} \right\rangle dt, \quad (1.14)$$

dove gli operatori  $\bar{F}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\bar{G}$  sono definiti da

$$\bar{F} = (I-P)L^{*-1}KL^{-1}(I-P), \quad (1.15)$$

$$\mathcal{H} = (I-P)L^{*-1}KL^{-1}PB \in \mathcal{L}(U, R(T)), \quad (1.16)$$

$$\bar{G} = N + B^*PL^{*-1}KL^{-1}PB \in \mathcal{L}(U). \quad (1.17)$$

Osserviamo che  $\bar{G}$  in (1.17) ha inverso limitato ed é positivo. Il nostro scopo é ridurre l'espressione di  $J(u)$  in (1.6) ad una forma "diagonale", a cui si possano applicare risultati noti.

Poniamo

$$w = u + \bar{G}^{-1}\mathcal{H}^*(I - P)x, \quad (1.18)$$

$$\bar{F} = \bar{F} - \mathcal{H}\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^*. \quad (1.19)$$

Allora si vede che

$$J(u) = J(w) = \int_0^T \left\langle \begin{bmatrix} \bar{F} & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I - P)x \\ w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (I - P)x \\ w \end{bmatrix} \right\rangle dt. \quad (1.20)$$

D'altra parte,

$$\begin{bmatrix} \bar{F} & \mathcal{H} \\ \mathcal{H}^* & \bar{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathcal{H}\bar{G}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F} & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix},$$

cosicché

$$\begin{bmatrix} \bar{F} & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\mathcal{H}\bar{G}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F} & \mathcal{H} \\ \mathcal{H}^* & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix}.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{bmatrix} \bar{F} & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I - P)x \\ w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (I - P)x \\ w \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \bar{F} & \mathcal{H} \\ \mathcal{H}^* & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I - P)x \\ w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (I - P)x \\ w \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} \bar{F} & \mathcal{H} \\ \mathcal{H}^* & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I - P)x \\ w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I - P)x \\ w \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\begin{bmatrix} \bar{F} & \mathcal{H} \\ \mathcal{H}^* & \bar{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - P & 0 \\ B^*P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{*-1}KL^{-1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - P & PB \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

e cos 

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{bmatrix} \bar{F} & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I - P)x \\ w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (I - P)x \\ w \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} I - P & 0 \\ B^*P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{*-1}KL^{-1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - P & PB \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I - P)x \\ w \end{bmatrix}, \right. \\ & \quad \left. \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I - P)x \\ w \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} L^{*-1}KL^{-1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - P & PB \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I - P)x \\ w \end{bmatrix}, \right. \\ & \quad \left. \begin{bmatrix} I - P & PB \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{G}^{-1}\mathcal{H}^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I - P)x \\ w \end{bmatrix} \right\rangle \geq 0. \end{aligned}$$



Cioé, si è scritto  $J(u)$  nella forma

$$J(u) = J(w) = \int_0^\tau \{ \langle \tilde{F}(I - P)x, (I - P)x \rangle_{R(T)} + \langle \tilde{G}w, w \rangle_U \} dt \quad (1.21)$$

dove  $\tilde{G} > 0$  e  $\tilde{F} : R(T) \rightarrow R(T)$  è non-negativo.

Poiché dalla (1.18)  $w = u + \tilde{G}^{-1}\mathcal{H}^*(I - P)x$ , si ha  $u = w - \tilde{G}^{-1}\mathcal{H}^*(I - P)x$ , cosicché l'equazione (1.11) si legge

$$\frac{d}{dt}(I - P)x(t) = -\tilde{T}^{-1}(I + (I - P)B\tilde{G}^{-1}\mathcal{H}^*)(I - P)x(t) = \tilde{T}^{-1}(I - P)Bw(t), \quad 0 < t < \tau. \quad (1.22)$$

Di qui, il problema originale (0.1), (0.2), (0.6) è equivalente a

$$\min_{w \in L^2(0, \tau; U)} J(w), \quad (1.23)$$

dove  $J(w)$  è espresso dalla (1.20) e  $(I - P)x(t)$  e  $w(t)$  sono legati dalla (1.22) e dalla condizione iniziale (1.12). Ora, (1.22), (1.12), (1.23) è un problema di minimo regolare. Si può allora stabilire il seguente risultato.

**Teorema 1.** *Sotto le assunzioni (0.4), (1.2), esiste un unico controllo  $u^* \in L^2(0, \tau; U)$  ed esiste una corrispondente soluzione ottima  $y^* \in L^2(0, \tau; H)$ ,  $My^* \in H^1(0, \tau; H)$  del sistema (0.1), (0.2) che minimizza  $J(u)$  su  $L^2(0, \tau; U)$ .*

**Osservazione 1.** Se gli operatori  $L$  ed  $M$  sono limitati ed autoaggiunti,  $L > 0$ , potremo in ogni caso considerare il problema (0.1), (0.2), (0.6) in una topologia di  $H$  per cui  $P$  è autoaggiunto (vedi Kato [9], p. 419). Introducendo, infatti, il prodotto interno in  $H$

$$(x, y) = \langle Lx, y \rangle_H, \quad x, y \in H, \quad (1.24)$$

l'equazione (0.1) si legge equivalentemente

$$\frac{d}{dt}(L^{-1}My(t)) + y(t) = L^{-1}Bu(t), \quad 0 < t < \tau, \quad (1.25)$$

dove  $L^{-1}M \in \mathcal{L}(H)$  e

$$(L^{-1}Mx, y) = \langle Mx, y \rangle = \langle x, My \rangle = \langle Lx, L^{-1}My \rangle = (x, L^{-1}My).$$

Inoltre,

$$\int_0^\tau \langle Ky, y \rangle dt = \int_0^\tau \langle LL^{-1}Ky, y \rangle dt = \int_0^\tau \langle L^{-1}Ky, y \rangle dt$$

e

$$(L^{-1}Kx, y) = \langle Kx, y \rangle = \langle x, Ky \rangle = \langle Lx, L^{-1}Ky \rangle = (x, L^{-1}Ky).$$

dicono che  $L^{-1}K$  è autoaggiunto  $\geq 0$ .

Dunque, (0.1), (0.2), (0.6) è equivalente a (1.25) insieme alla condizione iniziale

$$(L^{-1}My)(0) = L^{-1}My_0,$$

e con funzionale costo

$$J(u) = \int_0^\tau \{(L^{-1}Ky, y) + \langle Nu, u \rangle_U\} dt.$$

Poiché

$$(z + L^{-1}M)^{-1} = (zL + M)^{-1}L,$$

$z = 0$  è un polo semplice per il risolvente di  $L^{-1}M$  ed il corrispondente proiettore  $P$  è autoaggiunto.

**Osservazione 2.** Se  $L$  ed  $M$  sono operatori autoaggiunti, con lo stesso dominio, e commutano, allora  $T$  è autoaggiunto, cosicché anche  $P$  è autoaggiunto.

La riduzione del problema di partenza a (1.22), (1.12), (1.23), (si noti che  $\tilde{F} \in \mathcal{L}(R(T))$ ) permette di scrivere la relativa equazione di Riccati (in  $\mathcal{L}(R(T))$ ). Precisamente, posti

$$A = -\tilde{T}^{-1}(I + (I - P)B\tilde{G}^{-1}H^*)(I - P) \in \mathcal{L}(R(T)), \quad (1.26)$$

$$C = -\tilde{T}^{-1}(I - P)B \in \mathcal{L}(U; R(T)), \quad (1.27)$$

utilizzando Zabczyck [14], pp. 133-134, esiste una unica soluzione  $P(t) \in \mathcal{L}(R(T))$  dell'equazione di Riccati

$$\frac{d}{dt}P(t) = \tilde{F} + P(t)A + A^*P(t) - P(t)C\tilde{G}^{-1}C^*P(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (1.28)$$

$$P(0) = 0, \quad (1.29)$$

tale che  $P(t)^* = P(t) \geq 0$  e  $P(t)$  è fortemente differenziabile. Naturalmente, si identificherà  $R(T)^*$  con  $R(T)$ .

Inoltre, il valore minimo di  $J(w)$  è  $\langle P(\tau)(I - P)Ly_0, (I - P)Ly_0 \rangle_{R(T)}$ , mentre il controllo ottimo  $w^*$  di (1.23) è

$$w^*(t) = -\tilde{G}^{-1}C^*P(\tau - t)(I - P)x^*(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (1.30)$$

dove  $(I - P)x^*(\cdot)$  soddisfa il sistema

$$\frac{d}{dt}(I - P)x^*(t) = (A - C\tilde{G}^{-1}C^*P(\tau - t))(I - P)x^*(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (1.31)$$

$$(I - P)x^*(0) = (I - P)x_0. \quad (1.32)$$

Tenendo conto della relazione (1.18), si vede che il controllo ottimo  $u^*(\cdot)$  è dato da

$$\begin{aligned} u^*(t) &= w^*(t) - \tilde{G}^{-1}\mathcal{H}^*(I - P)x^*(t) \\ &= -\tilde{G}^{-1}\{C^*P(\tau - t) + \mathcal{H}^*\}(I - P)x^*(t). \end{aligned} \quad (1.33)$$



Poiché  $Ly(\cdot) = x(\cdot)$ , deduciamo che il controllo ottimo  $u^*(\cdot)$  e la corrispondente soluzione ottima  $y^*(\cdot)$  sono legati da

$$u^*(t) = -\bar{G}^{-1}\{C^*P(\tau-t) + \mathcal{H}^*\}(I-P)Ly^*(t). \quad (1.34)$$

Osserviamo esplicitamente che in virtù della (1.33) il controllo ottimo è continuo su  $[0, \tau]$ .

**Osservazione 3.** Se introduciamo

$$p^*(t) = P(\tau-t)(I-P)x^*(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (1.35)$$

cosicché

$$C^*p^*(t) + \bar{G}w^*(t) \equiv 0, \quad (1.36)$$

allora  $p^*(\cdot)$  soddisfa

$$\frac{d}{dt}p^*(t) = -A^*p^*(t) - \tilde{F}(I-P)x^*(t), \quad (1.37)$$

$$p(\tau) = 0. \quad (1.38)$$

Così  $((I-P)x^*, p^*, w^*)$  è soluzione di un problema two-point che in effetti caratterizza la soluzione ottima.

Si può dimostrare che il controllo ottimo e la corrispondente soluzione ottima sono in effetti univocamente determinati mediante il seguente sistema algebrico-differenziale.

**Teorema 2.** *Sotto le assunzioni precedenti, la coppia ottima  $(y^*, u^*)$  è, rispettivamente, la prima e terza componente della soluzione del problema*

$$\frac{d}{dt}(My)(t) + Ly(t) = Bu(t), \quad 0 < t < \tau,$$

$$-M^*\frac{dp}{dt}(t) + L^*p(t) = Ky(t), \quad 0 < t < \tau,$$

$$B^*p(t) + Nu(t) = 0, \quad 0 < t < \tau,$$

$$My(0) = My_0, \quad M^*p(\tau) = 0,$$

dove  $y \in L^2(0, \tau; \mathcal{D}(L))$ ,  $My^* \in H^1(0, \tau; H)$ ,  $p^* \in H^1(0, \tau; H)$ ,  $p^* \in L^2(0, \tau; \mathcal{D}(L))$ ,  $u^* \in L^2(0, \tau; U)$ .

## 2 Esempi ed applicazioni

**Esempio 1.** Vediamo con un esempio semplice come si applica concretamente il Teorema 1.

Consideriamo il sistema

$$\frac{d}{dt}(x+y)(t) + x(t) = 2u(t), \quad 0 < t < 1, \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt}(x+y)(t) + y(t) = u(t), \quad 0 < t < 1, \quad (2.2)$$

$$(x+y)(0) = \xi_0. \quad (2.3)$$

Sottraendo e poi sommando la (2.2) alla (2.1), si ottiene

$$x - y = u, \quad (2.4)$$

$$2(x+y)'(t) + (x+y)(t) = 3u(t). \quad (2.5)$$

Posto  $x+y = \xi$ , si ha

$$x = \frac{1}{2}(u + \xi), \quad y = \frac{1}{2}(\xi - u), \quad (2.6)$$

dove  $\xi(\cdot)$  soddisfa

$$\dot{\xi} = -\frac{\xi}{2} + \frac{3}{2}u, \quad 0 < t < 1. \quad (2.7)$$

Vogliamo minimizzare

$$J(u) = \int_0^1 (x^2 + 2y^2 + u^2) dt. \quad (2.8)$$

Si osserva che

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{4}(\xi + u)^2 + \frac{1}{2}(\xi - u)^2 + u^2 \right\} dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & 7/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi \\ u \end{bmatrix} \right\rangle dt. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Posto (cfr. la dimostrazione del Teorema 1)

$$w = u - \xi/7, \quad (2.10)$$

allora

$$J(u) = J(w) = \int_0^1 \left( \frac{5}{7}\xi^2 + \frac{7}{4}w^2 \right) dt, \quad (2.11)$$

mentre il problema (2.7), (2.3) diventa

$$\xi'(t) = -\frac{2}{7}\xi(t) + \frac{3}{2}w(t), \quad (2.12)$$

$$\xi(0) = \xi_0. \quad (2.13)$$

Se cerchiamo

$$\inf_w J(u) = \inf_w J(w), \quad (2.14)$$

problema del regolatore classico, sappiamo che il controllo ottimo  $w(\cdot)$  è caratterizzato da

$$w(t) = -\frac{6}{7}P(1-t)\xi(t), \quad (2.15)$$

dove  $P(t)$  è la soluzione dell'equazione di Riccati

$$\frac{d}{dt}P(t) = \frac{5}{7} - \frac{4}{7}P(t) - \frac{9}{7}P(t)^2, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.16)$$

$$P(t) \geq 0, \quad P(0) = 0, \quad (2.17)$$

e  $\xi(t)$  soddisfa

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = -\left(\frac{2}{7} + \frac{9}{7}P(1-t)\right)\xi(t), \quad 0 < t < 1, \quad \xi(0) = \xi_0. \quad (2.18)$$

Dalla (2.10) segue che il controllo ottimo per il problema di minimo relativo a  $J(u)$  coi vincoli (2.1)~(2.3) è caratterizzato da

$$u(t) = \frac{1}{7}(1 - 6P(1-t))\xi(t) \quad (2.19)$$

e

$$x(t) = \frac{1}{2}(u(t) + \xi(t)), \quad y(t) = \frac{1}{2}(\xi(t) + u(t)). \quad (2.20)$$

Questo fornisce la sintesi desiderata del problema.

**Esempio 2.** Consideriamo l'equazione astratta nello spazio di Hilbert  $H$

$$\frac{d}{dt}(A - z_0)y = Ay + Bu, \quad 0 < t < \tau, \quad (2.21)$$

dove  $B \in \mathcal{L}(U, H)$ ,  $U$  è uno spazio di Hilbert,  $A$  è un operatore lineare chiuso densamente definito, con inverso limitato e  $z = z_0$  è un polo semplice di  $(z - A)^{-1}$ . Prendiamo  $L = -A$ ,  $M = A - z_0$ . Allora  $T = ML^{-1} = z_0A^{-1} - I$  e

$$\begin{aligned} (z - T)^{-1} &= A((z + 1)A - z_0)^{-1} = (z + 1)^{-1}A\left(A - \frac{z_0}{z + 1}\right)^{-1} \\ &= (z + 1)^{-1}A\left(A - z_0 + \frac{z_0z}{z + 1}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.22)$$

per  $0 < |z| \leq \epsilon$ ,  $\epsilon$  piccolo. Poiché

$$A\left(A - z_0 + \frac{z_0z}{z + 1}\right)^{-1} = I + \frac{z_0}{I + z}\left(A - z_0 + \frac{z_0z}{z + 1}\right)^{-1}$$

e

$$\|A(A - z_0 + \frac{z_0 z}{z + 1})^{-1}\| \leq 1 + C|z|^{-1} \leq C'|z|^{-1}, \quad 0 < |z| \leq \epsilon,$$

dalla (2.22) concludiamo che esiste  $C_1 > 0$  tale che

$$\|(z - T)^{-1}\| \leq C_1|z|^{-1}, \quad 0 < |z| \leq \epsilon,$$

cosicch  tutti i risultati si applicano. In effetti, il Teorema 1 richiederebbe  $A$  autoaggiunto, ma, come precedentemente osservato, tale assunzione pu  essere eliminata. L'equazione (2.21)   il modello di alcune equazioni alle derivate parziali di tipo Sobolev nello spazio  $H = L^2(\Omega)$ , dove  $\Omega$    un aperto limitato di  $R^n$  a frontiera regolare,  $A$    un operatore differenziale ellittico di ordine  $2m$ ,  $m \geq 1$ , con condizioni ai limiti o Dirichlet o Neumann o miste, e  $z = z_0$    un autovalore isolato semplice dell'operatore differenziale (con le date condizioni ai limiti).

## BIBLIOGRAFIA

- [1] K. Balla, R. März, *Linear differential algebraic equations of index 1 and their adjoint equations*, Result Math. 37 (2000), 13-35.
- [2] V. Barbu, A. Favini, *Control of degenerate differential systems*, Control and Cybernetics 28 (1999), No. 3, 397-420.
- [3] V. Barbu, A. Favini, L. Pandolfi *Optimal regulation with quadratic cost functional of a degenerate system*, to appear.
- [4] D.J. Bender, A.J. Laub, *The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems*, IEEE Trans. Automatic Control Vol. AC-32, No.8 (1987), 672-688.
- [5] S.L. Campbell, "Singular systems of differential equations", Pitman, San Francisco, 1980.
- [6] D. Cobb, *Descriptor variable systems and optimal state regulation*, IEEE Trans. Automatic Control Vol. AC-28, No.5 (1983), 601-611.
- [7] L. Dai, "Singular control systems", LN Control Information Sciences 118, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.
- [8] A. Favini, A. Yagi, "Degenerate differential equations in Banach spaces", Pure Appl. Math. 215, M. Dekker, New York-Basel-Hong Kong, 1999.
- [9] T. Kato, "Perturbation theory for linear operators", Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.
- [10] F.L. Lewis, *A survey of linear singular systems*, Circuits Syst. & Signal Process. 5, no. 1 (1986), 3-36.
- [11] J.L. Lions, "Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles", Dunod, Paris, 1968.
- [12] L. Pandolfi, *On the regulator problem for linear degenerate control systems*, J. Opt. Theory Appl. 33 (1981), 241-254.
- [13] G.A. Sviridyuk, A.A. Efremov, *Optimal control of Sobolev type linear equations with relatively p-sectorial operators*, Diff. Uravnenia 31 (1995), 1912-1916, (English translation : Diff. Eqs. 31 (1995), 1882-1890).
- [14] J. Zabczyk, "Mathematical control theory: an introduction", Birkhäuser Verlag, Boston-Basel-Berlin, 1992.